



**st**  
scientific tools

Hans-Gert Gräbe  
Michael Kofler

# Mathematica 6

Einführung, Grundlagen, Beispiele

5., aktualisierte Auflage

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>13</b>
<b>Einführung</b>	<b>17</b>
<b>Konzeption</b>	<b>19</b>
<b>Teil I      <i>Mathematica</i> kennenlernen</b>	<b>21</b>
<b>Kapitel 1      <i>Mathematica</i> nutzen</b>	<b>23</b>
1.1 <i>Mathematica</i> als Taschenrechner für Zahlen .....	24
1.2 <i>Mathematica</i> als Taschenrechner für Formeln und symbolische Ausdrücke .....	28
1.3    Listen, Matrizen, Substitutionslisten .....	30
1.4 <i>Mathematica</i> als mathematisches Expertensystem .....	33
1.5    Die Notation von <i>Mathematica</i> .....	37
1.5.1    Bezeichner .....	38
1.5.2    Operatoren .....	40
1.5.3    Pakete .....	41
1.6    Befehle finden .....	43
1.7 <i>Mathematica</i> -Notebooks .....	44
1.7.1    Sonderzeichen .....	45
1.7.2    Tastenkürzel .....	46
1.7.3    Paletten .....	47
1.8    Zusammenfassung .....	48
<b>Kapitel 2      Mathematik mit dem Computer</b>	<b>51</b>
2.1 <i>Mathematica</i> -Texte und mathematische Texte .....	52
2.2    Mathematische Experimente und mathematische Beweise .....	53
2.2.1    Beispiel 1: Potenzreste .....	54
2.2.2    Beispiel 2: Perfekte Zahlen .....	55
2.2.3    Beispiel 3: Der Vietasche Wurzelsatz .....	58
2.3    Programmierung .....	60
2.3.1    Steuerstrukturen .....	60
2.3.2    Funktionsdefinitionen und Blöcke .....	65
2.4    Beispiele .....	67
2.4.1    Symmetrische Polynome .....	67
2.4.2    Der Euklidische Algorithmus .....	68
2.4.3    Ein Grafikbeispiel .....	69
2.4.4    Berechnung der Kettenbruchentwicklung rationaler Zahlen .....	71

2.4.5	Schnelles modulares Potenzieren.....	73
2.4.6	Fibonaccizahlen .....	74
2.5	Syntaxzusammenfassung .....	78
<b>Kapitel 3</b>	<b>Mathematica als Visualisierungswerkzeug</b>	<b>81</b>
3.1	Einführung.....	82
3.2	Zum Aufbau von Grafiken .....	86
3.2.1	Grafikprimitive und -direktiven .....	87
3.2.2	3D-Grafiken zusammenbauen .....	91
3.2.3	Das GraphicsComplex-Primitiv .....	94
3.3	Interaktive Grafiken und Animationen .....	99
3.4	Export und Import .....	101
3.5	Syntaxzusammenfassung .....	103
<b>Teil II</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>105</b>
<b>Kapitel 4</b>	<b>Symbole und Ausdrücke</b>	<b>107</b>
4.1	Einführung.....	108
4.2	Ausdrücke .....	109
4.2.1	Operatoren .....	112
4.2.2	Mathematische Funktionen.....	113
4.2.3	Ausgabeformatierung von Ausdrücken .....	115
4.3	Bezeichner, Symbolvariablen und Wertvariablen .....	116
4.3.1	Kontexte und Bezeichner aus Paketen .....	120
4.3.2	Wertzuweisungen .....	120
4.3.3	Systemvariablen .....	122
4.3.4	Optionen .....	122
4.3.5	Mathematische Konstanten .....	123
4.3.6	Attribute .....	125
4.3.7	Assumptions .....	126
4.4	Zusammenfassung .....	127
<b>Kapitel 5</b>	<b>Funktionen und Auswertung</b>	<b>129</b>
5.1	Einführung.....	130
5.2	Funktionssymbole und -ausdrücke.....	133
5.3	Auswertung von Ausdrücken .....	133
5.3.1	Attribute .....	134
5.3.2	Auswertung von Plot-Funktionen .....	135
5.3.3	Auswertung boolescher Ausdrücke.....	136
5.4	Funktionen definieren .....	142
5.4.1	Transformationen, Regeln und Muster.....	142
5.4.2	Partiell definierte Funktionen .....	144
5.4.3	Bedingte Funktionsvorschriften .....	144

5.4.4	Konditionale Muster .....	145
5.4.5	Typmuster .....	146
5.4.6	Funktionen mit variabler Parameterzahl .....	148
5.4.7	Muster, Regeln, Substitutionen und lokale Zuweisungen .....	149
5.5	Funktionen stückweise zusammensetzen .....	150
5.5.1	Realisierung mit bedingten Funktionsdefinitionen .....	150
5.5.2	Realisierung mit If oder Which .....	151
5.5.3	Realisierung mit Piecewise .....	152
5.6	Funktionen von Funktionen .....	154
5.6.1	Namenlose Funktionen .....	155
5.6.2	Interpolationsfunktionen .....	157
5.7	Funktionen mit Gedächtnis .....	158
5.8	Numerische Funktionen .....	160
5.9	Syntaxzusammenfassung .....	162
<b>Kapitel 6 Listen</b>		<b>163</b>
6.1	Listen im alltäglichen Umgang mit <i>Mathematica</i> .....	164
6.1.1	Iteratoren .....	165
6.1.2	Listen erzeugen .....	166
6.1.3	Auf Listenelemente zugreifen .....	168
6.1.4	Funktionen und Listen .....	169
6.1.5	Listen manipulieren .....	171
6.1.6	Teillisten zusammenstellen .....	173
6.1.7	Substitutionslisten .....	173
6.2	Beispiel: Nullstellen eines Polynoms über $\mathbb{Z}_p$ .....	174
6.3	Beispiel: Punkte auf einer elliptischen Kurve über $\mathbb{Z}_p$ .....	176
6.4	Teillisten und Muster .....	177
6.4.1	Zusammengesetzte Muster und Defaultmuster .....	179
6.5	Spezielle listenbasierte Datenstrukturen .....	180
6.5.1	Mengen .....	180
6.5.2	Matrizen und Vektoren .....	181
6.6	Weitere Beispiele .....	182
6.6.1	Komplexe Zahlen in Real- und Imaginärteil aufspalten .....	183
6.6.2	Komplexe Zahlen aus zwei Listen konstruieren .....	183
6.6.3	Gleitenden Durchschnitt berechnen .....	184
6.7	Syntaxzusammenfassung .....	187
<b>Kapitel 7 Fortgeschrittene Konzepte</b>		<b>191</b>
7.1	Grundprinzipien des symbolischen Rechnens .....	192
7.2	Funktionen und Optionen .....	194
7.2.1	Optionen in eigenen Funktionsdefinitionen verwenden .....	195
7.2.2	Neue Optionen .....	196

7.3	Noch einmal Funktionen.....	200
7.3.1	Funktionen mit optionalen Parametern.....	200
7.3.2	Upvalues und Downvalues .....	201
7.3.3	Zusammengesetzte Bezeichner .....	203
7.3.4	Block versus Module .....	204
7.3.5	Eigene Operatoren definieren.....	207
7.4	Geschwindigkeitsoptimierung, Compile .....	208
7.4.1	Funktionen kompilieren.....	209
7.5	Modularisierung und Pakete .....	210
7.5.1	Was ist ein Paket? .....	210
7.5.2	Pakete laden .....	211
7.5.3	Der prinzipielle Aufbau einer Paketdatei .....	212
7.5.4	Eigene Pakete anlegen .....	213
7.5.5	Das Paket Test` Fibonacci.....	214
7.5.6	Zusammenfassung.....	215

**Kapitel 8 Grafiken erstellen 217**

8.1	Einfache Grafiken aus Primitiven erstellen.....	218
8.1.1	Ein Gitter erzeugen .....	218
8.1.2	GitterPlot und ParametricPlot3D .....	221
8.1.3	Ein Torus .....	223
8.2	Die Farbsysteme von <i>Mathematica</i> .....	224
8.2.1	Die verschiedenen Farbsysteme .....	224
8.2.2	Überdeckungen und Transparenz in 2D-Grafiken .....	226
8.2.3	Farbgebung und Rastergrafiken .....	227
8.3	Das 3D-Beleuchtungsmodell von <i>Mathematica</i> .....	230
8.4	CutOut – durchsichtige 3D-Objekte .....	235
8.4.1	Eine erste Lösung.....	235
8.4.2	CutOut – Löcher in Polygone schneiden.....	236
8.4.3	CutOut für komplexe Graphics3D-Objekte.....	238
8.5	TubePlot3D – Röhrenkurven programmieren.....	240
8.5.1	TubePlot3D – die analytische Lösung.....	241
8.5.2	TubePlot3D mit Grafikprimitiven .....	244
8.5.3	TubePlot3D anwenden .....	247

**Teil III Mathematik 253**

**Kapitel 9 ... Doing Mathematics by Computer 255**

9.1	Grenzwerte und Reihen .....	256
9.1.1	Grenzwertberechnung .....	257
9.1.2	Reihenentwicklungen .....	260
9.1.3	Mit Potenzreihen rechnen .....	263

9.2	Differentiation .....	266
9.2.1	Ableitungen einstelliger Funktionen .....	267
9.2.2	Ableitungen mehrstelliger Funktionen .....	268
9.3	Integration .....	271
9.3.1	Symbolische Integration .....	272
9.3.2	Mehrfachintegrale .....	276
9.3.3	Numerische Integration .....	278
9.3.4	Uneigentliche Integrale .....	280
9.3.5	Integrale mit Parametern .....	284
9.3.6	Pfadintegrale im Komplexen .....	284
9.4	Syntaxzusammenfassung .....	290
<b>Kapitel 10 Vektoren und Matrizen, lineare Algebra</b>		<b>293</b>
10.1	Matrizen und Vektoren .....	294
10.1.1	Vektoren und zusammengesetzte Bezeichner .....	294
10.1.2	Beispiel: Schnitt von Gerade und Ebene .....	296
10.1.3	Vektoren versus einspaltige Matrizen .....	297
10.1.4	Matrizen erzeugen .....	299
10.1.5	Zugriff auf Matrixelemente .....	302
10.1.6	Mit Matrizen rechnen .....	303
10.2	Dünn besetzte Matrizen .....	305
10.3	Lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise .....	308
10.4	Eigenwerte und Eigenvektoren .....	312
10.5	Syntaxzusammenfassung .....	313
<b>Kapitel 11 Umformen und Vereinfachen mathematischer Ausdrücke</b>		<b>317</b>
11.1	Die Simplifikationsproblematik .....	319
11.1.1	Vereinfachen mit Simplify .....	320
11.1.2	Gezielte Umformung von Ausdrücken .....	321
11.1.3	Erkennen semantisch gleichwertiger Ausdrücke .....	322
11.1.4	Umformungen und mathematische Exaktheit – Zusatzannahmen .....	323
11.1.5	Eigene Umformungsregeln vereinbaren .....	326
11.2	Polynomiale, rationale und pseudorationale Ausdrücke .....	327
11.2.1	Ausmultiplizieren polynomialer Ausdrücke .....	328
11.2.2	Ausdrücke ordnen und nach Variablen zusammenfassen .....	329
11.2.3	Zerlegen in Faktoren .....	332
11.2.4	Arbeiten mit rationalen Ausdrücken .....	334
11.3	Trigonometrische Ausdrücke .....	336
11.3.1	Wie vereinfacht man trigonometrische Ausdrücke? .....	336

11.3.2	<i>Mathematica</i> -Kommandos zur Umformung trigonometrischer Funktionen .....	337
11.3.3	Ein Regelsystem für trigonometrische Funktionen .....	339
11.3.4	Trigonometrische Umformungen in Anwendungen .....	341
11.4	Syntaxzusammenfassung .....	344

**Kapitel 12 Gleichungen und Ungleichungen 347**

12.1	Solve für lineare und algebraische Gleichungen .....	349
12.2	Solve und Reduce für transzendente Gleichungen .....	353
12.3	Lösungen weiterverarbeiten .....	360
12.4	Nullstellen von Polynomen .....	362
12.4.1	Die Root-Notation .....	362
12.4.2	Rechnen mit algebraischen Zahlen .....	365
12.4.3	Polynome dritten und vierten Grades .....	369
12.5	Polynomiale Gleichungssysteme .....	374
12.5.1	Beispiele .....	374
12.6	Weitere Aufgabenstellungen .....	379
12.6.1	Nullstellen zählen .....	382
12.6.2	Ungleichungen und Ungleichungssysteme .....	383
12.6.3	Gleichungen über anderen Grundbereichen lösen .....	385
12.7	Differenzialgleichungen .....	395
12.7.1	Zwei Beispiele .....	396
12.7.2	Randbedingungen und Integrationskonstanten .....	398
12.7.3	DSolve im Einsatz .....	399
12.7.4	DSolve und InverseFunction .....	402
12.7.5	Systeme von Differenzialgleichungen .....	405
12.8	Syntaxzusammenfassung .....	408

**Kapitel 13 Numerische Verfahren 411**

13.1	Numerische Auswertung symbolischer Ergebnisse .....	413
13.1.1	Rechengenauigkeit .....	414
13.1.2	Näherungswerte in exakte Werte verwandeln .....	416
13.2	Gleichungen numerisch lösen .....	417
13.2.1	Solve und NSolve .....	417
13.2.2	Numerische Nullstellenbestimmung mit FindRoot .....	420
13.3	Numerische Integration .....	424
13.4	Datenanalyse .....	427
13.4.1	Fit mit vorgegebenen Basisfunktionen .....	427
13.4.2	Nichtlineare Regression mit FindFit .....	428
13.5	Zur Genauigkeit numerischer Rechnungen .....	430
13.5.1	PrecisionGoal, AccuracyGoal, WorkingPrecision .....	430
13.5.2	ExtraPrecision .....	433
13.6	Zusammenfassung .....	434

<b>Teil IV</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>437</b>
<b>Kapitel 14</b>	<b>Mit <i>Mathematica</i> durchs Abitur</b>	<b>439</b>
14.1	CAS in der Schule .....	440
14.2	Flächenstück unter einer Kurve .....	441
14.3	Eine Eliminationsaufgabe .....	443
14.4	Komplexe Wurzeln .....	445
14.5	Eine Extremwertaufgabe .....	447
14.6	Analytische Geometrie .....	450
<b>Kapitel 15</b>	<b>Summen und Integrale</b>	<b>453</b>
15.1	Folgen und Partialsummen .....	454
15.2	Hypergeometrische Summen .....	455
15.3	Unendliche Summen und Integrale .....	459
15.3.1	Integrale und Summen rationaler Funktionen – etwas Theorie ..	460
15.3.2	Uneigentliche Integrale rationaler Funktionen .....	463
15.3.3	Summen über rationale Funktionen .....	464
15.3.4	Die PolyGamma-Funktion .....	466
<b>Kapitel 16</b>	<b>Differenzialgleichungen analysieren</b>	<b>469</b>
16.1	Analyse mit NDSolve .....	470
16.2	Ein komplexes Beispiel .....	473
	<b>Quellenverzeichnis</b>	<b>483</b>
	<b>Verzeichnis der Syntaxzusammenfassungen</b>	<b>485</b>
	<b>Index</b>	<b>487</b>