Reguläre Polyeder

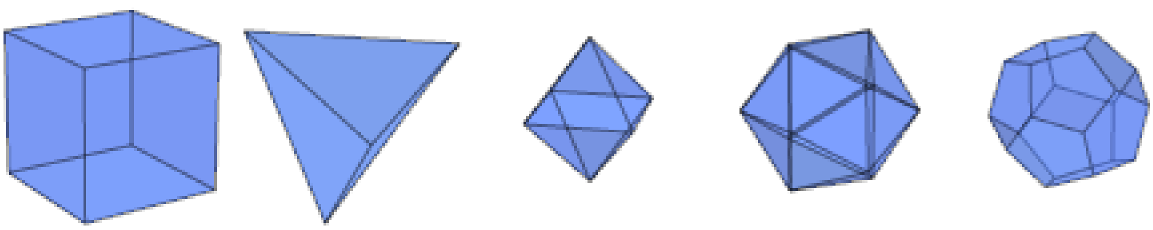
Vortrag von
Prof. Hans-Gert Gräbe, Uni Leipzig

im Mathespezialistencamp der LSGM
22. Juli 2006, Ilmenau

```
export(plot):
```

Die fünf Platonischen Körper

```
plot(Canvas(Layout=Horizontal,Width=16*unit::cm,
op(map([Hexahedron, Tetrahedron, Octahedron, Icosahedron, Dodecahedr
u -> Scene3d(u(FillColorFunction = RGB::LightBlue.[0.4]),Axes = None
```



Als Platonische Körper bezeichnet man diejenigen (konvexen) Polyeder, welche "am symmetrischsten" sind.

Charakterisierende Eigenschaften:
Jeder dieser Körper

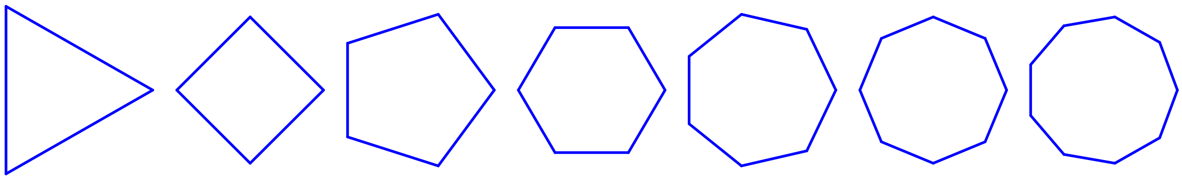
o sieht an jeder Ecke "gleich aus",

o sieht an jeder Kante "gleich aus",
o sieht an jeder Seitenfläche "gleich aus".

Frage: Gibt es weitere solche Körper? Wie können wir unsere Vermutung beweisen?
Dazu müssen wir wissen, was genau mit "sieht gleich aus" gemeint ist.

Zwischenfrage: Wie sieht das in der Ebene aus?

```
plot(Canvas(Layout=Horizontal,Width=16*unit::cm,Scene2d(Polygon2d(
        [[cos(2*PI*k/n), sin(2*PI*k/n)] $ k = 0..n]))$n=3..9,
Axes=None,Scaling=Constrained))
```



Antwort: In der Ebene gibt es unendlich viele reguläre Polygone.
Genauer stellen wir fest, dass es für jedes $n \geqslant 3$ bis auf Ähnlichkeit genau ein reguläres Polygon gibt.

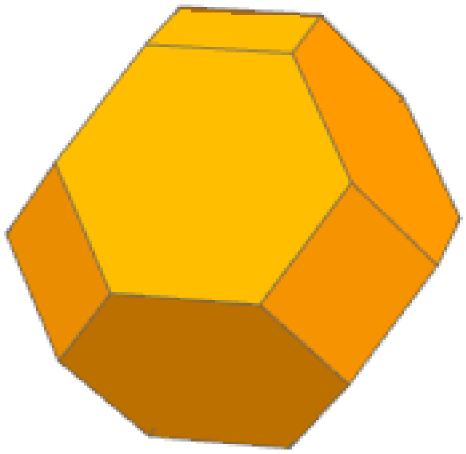
Die Eulersche Polyederformel

Wir bestimmen für jeden der Platonischen Körper die Anzahl *e* der Ecken, *k* der Kanten, *f* der Seitenflächen

In jedem der Fälle gilt ...

Weitere Beispiele


```
plot(plot::Waterman(4.5),Axes=None)
```



Satz (Eulersche Polyederformel): Für jedes konvexe Polyeder gilt *e-k+f=2*

Für ebene Polygone gilt übrigens *e=k* oder *e-k=0*.

Zwei Beweise der Eulerschen Polyederformel.

Beweis, dass es nur fünf Platonische Körper gibt

Reguläre Polyeder aus Dreiecken, *m* Kanten stoßen in einer Ecke zusammen:

```
u:=subs(e-k+f=2,f=2/3*k, e=2/m*k);
solve(u,k,IgnoreSpecialCases);
```

$$\frac{2 \cdot k}{m} - \frac{k}{3} = 2$$

$$\left\{-\frac{6 \cdot m}{m - 6}\right\}$$

Für verschiedene Werte von *m* erhalten wir folgende Lösungen

```
[m,6*m/(6-m)]$m=3..5;
```

$$[3,\ 6],\ [4,\ 12],\ [5,\ 30]$$

Allgemein: Reguläre Polyeder aus *p*-Ecken, *m* Kanten stoßen in einer Ecke zusammen


```
u:=subs(e-k+f=2,f=2/p*k, e=2/m*k);

solve(u,k,IgnoreSpecialCases);
```

```
solve(u,k,IgnoreSpecialCases);
```

$$\frac{2 \cdot k}{m} - k + \frac{2 \cdot k}{p} = 2$$

$$\left\{\frac{2}{\frac{2}{m} + \frac{2}{p} - 1}\right\}$$

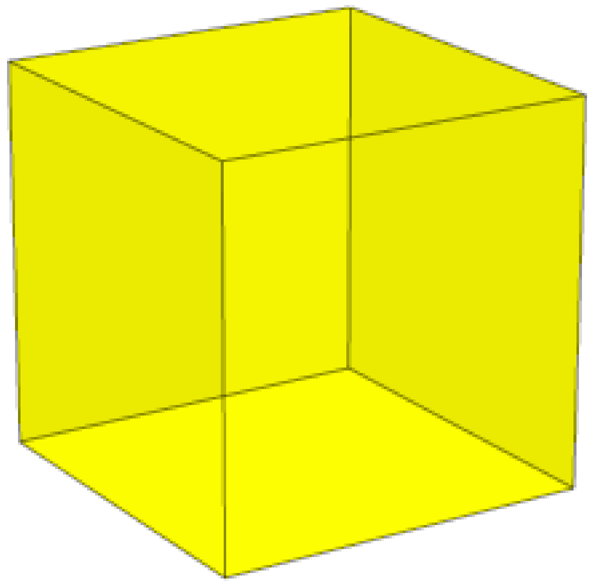
Es muss zunächst einmal $\frac{2}{m} + \frac{2}{p} - 1$ positiv sein. *p=3* haben wir betrachtet, bleibt *p=4* und *p=5*. Es ist jeweils nur *m=3* möglich.

Die Gruppen der Symmetrien der Platonischen Körper

Für Ecken heißt "sieht gleich aus", dass es für jedes Paar Ecken eine Bewegung des Körpers gibt, welche den Körper in sich überführt und die jeweilige Eckenfigur in die andere Eckenfigur.

Eigenschaften der Menge der Bewegungen, die einen gegebenen Würfel in sich selbst überführen.

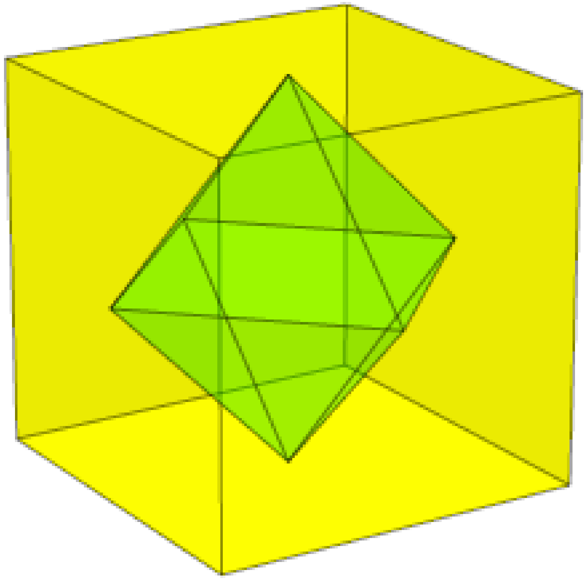
```
plot(Hexahedron (FillColorFunction = RGB::Yellow.[0.9]), Axes = None)
```



Beschreibung der Gruppen der Platonischen Körper unter Berücksichtigung der Dualität.

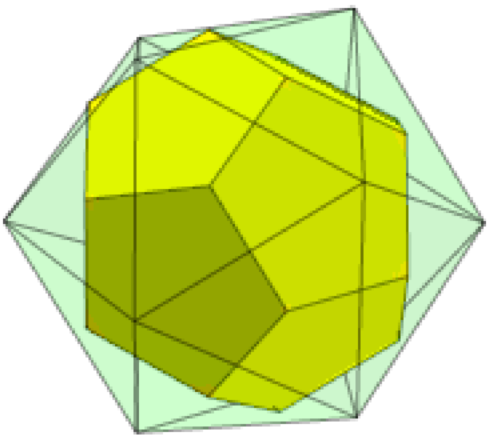
Würfel und Oktaeder

```
plot(Hexahedron (FillColorFunction = RGB::Yellow.[0.9]),
     Octahedron (FillColorFunction = RGB::Green.[0.2]), Axes = None)
```



Dodekaeder und Ikosaeder

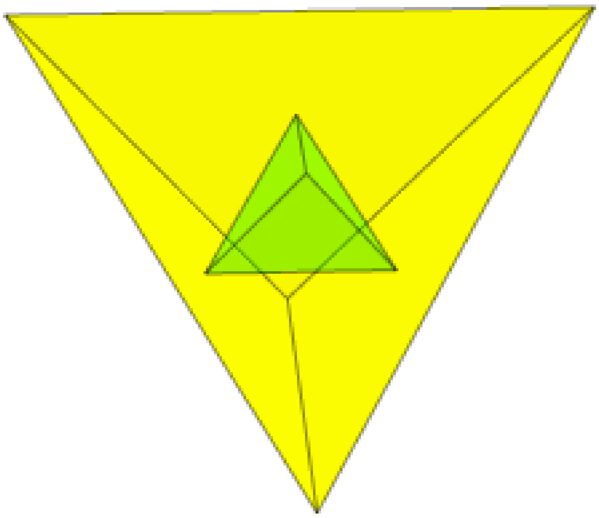
```
plot(Dodecahedron (FillColorFunction = RGB::Yellow),
     Rotate3d(PI/2,[0,0,0],[0,0,1],Scale3d([1.12$3],
         Icosahedron (FillColorFunction = RGB::Green.[0.1]))),
     Axes = None)
```



Tetraeder und ?

```
plot(Tetrahedron(FillColorFunction = RGB::Yellow.[0.9]),
     plot::Scale3d([-1/3$3],
         Tetrahedron (FillColorFunction = RGB::Green.[0.2])),
```

```
    Axes = None)
```



Nacheinanderausführung von Würfeldrehungen, was ergibt sich?

Beweisidee: Eckenbewegungen verfolgen und daraus die ursprüngliche Drehung rekonstruieren.
Führt zur Idee der "operationstreuen Abbildung" in die Menge der Permutationen der Ecken.

Begriff der Gruppe und der Isomorphie von Gruppen.