

Auszug aus dem Buch

Hans-Gert Gräbe: Computeralgebra im Abitur.

EAGLE Starthilfe 104.

Edition am Gutenbergplatz Leipzig 2018.

ISBN 978-3-95922-104-7

1 Computeralgebra in der Schule

1.1 Mathematik, Sprache, Computer

Mathematik ist die „lingua franca“ der Wissenschaft, und ihre Bedeutung im Alltag wenigstens der WiMINT-Berufe¹ unbestritten. Mathematik in diesem Sinne ist vor allem *Sprache*, die Fähigkeit, sich kultiviert, logisch verständlich und mit einem angemessenen Sprachschatz ausdrücken zu können.

Auch *Informatik* – wenn man unter dem Begriff nicht allein Excel-Anfängerkurse fasst – ist vor allem *Sprache*, die Fähigkeit, sich kultiviert und für andere nachvollziehbar in einer immer stärker technisierten digitalen Welt zu bewegen. Der Gedanke, dass Bewegung in der digitalen Welt vor allem *sprachliche* Bewegung sei, mag zunächst überraschen. Aber bekanntlich „beschämt eine Biene durch den Bau ihrer Wachszellen manchen menschlichen Baumeister. Was aber von vornherein den schlechtesten Baumeister² vor der besten Biene auszeichnet, ist, dass er die Zelle in seinem Kopf gebaut hat, bevor er sie in Wachs baut. Am Ende des Arbeitsprozesses kommt ein Resultat heraus, das beim Beginn desselben schon in der Vorstellung des Arbeiters, also schon ideell vorhanden war.“ [12] Jedes technische Artefakt existiert zunächst in Sprachform, als *Plan*, seine Erschaffung setzt weiter *Sprache als Medium der Verabredung zu kooperativem Handeln* voraus, und auch die Nutzung jener Artefakte ist nicht möglich ohne ein intuitives oder explizites *Verständnis der Zwecke*, für welche das Artefakt geschaffen wurde.

Kern des digitalen Universums ist mit dem Computer eine *Universalmaschine*, der man sprachliche Anweisungen geben kann, um (fast) alles zu Wege zu bringen, was sich in algorithmische Form gießen lässt. Dabei ist der Computer längst der Generation der „number cruncher“ entwachsen, falls er je nur ein solcher gewesen ist. Lange vor dem Aufkommen des Symbolischen Rechnens als Teilgebiet der Informatik, ja selbst lange vor der *praktischen* Erfindung des Computers war klar, dass er „auf andere Dinge als Zahlen angewandt werden könne, wenn man Objekte finden könne, deren Wechselwirkungen durch die abstrakte Wissenschaft der Operationen dargestellt werden können und die sich für die Bearbeitung durch die Anweisungen und Mechanismen des Gerätes eignen.“ [11]

In der *Computeralgebra*, einer Symbiose von Mathematik und Computer, finden beide Perspektiven zusammen und bilden den Kern aller modernen Assistenzsysteme in Wirtschaft, Wissenschaft und Technik. Es ist deshalb nur folgerichtig, auch über eine *Verankerung der*

¹Nachdem eine Zeit lang von den MINT-Fächern geschrieben wurde, beginnt dieses neue Akronym in letzter Zeit sein Eigenleben. Google meint dazu: „*WiMINT* steht für Wirtschaft, Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik – diese oft beschworenen Zukunftsfächer gelten gewissermaßen als heilige Kühe der Bildungspolitik.“ „Im Rahmen der Kompetenzorientierung ... wurde der Mathematik-Schulstoff so weit ausgedünnt, dass das mathematische Vorwissen von vielen Studienanfängern nicht mehr für ein WiMINT-Studium ausreicht.“

²In Zitaten verwende ich das *femininum generale lipsiensis* nicht.

Computeralgebra im Schulcurriculum nachzudenken. Das *Potenzial* einer soliden Integration computermathematischer Zugänge in das Schulcurriculum für die Entwicklung des individuellen Sprachvermögens in einer zunehmend technisierten Gesellschaft – sowohl computersprachlicher Fertigkeiten in Richtung artefaktischer Technik als auch interpersoneller sprachlicher Fertigkeiten in Richtung kooperativer Formen von Technikentwicklung und -einsatz – kommt bisher wenig systematisch zum Einsatz. Der Computer ist unerbittlich in der Frage der Genauigkeitsanforderungen im Ausdruck und der sicheren Beherrschung begrifflicher Kontexte, aber nachsichtig und geduldig in deren Gebrauch und Entwicklung – falsche (auf syntaktischer wie semantischer Ebene) Eingaben werden stoisch mit „Hinweisen“ beantwortet und „man darf gleich noch einmal“.

1.2 Inhalte. Die Bildungsstandards

Eine derartige Entwicklung des Sprachvermögens besteht aus drei wesentlichen Komponenten, die bereits im hochmittelalterlichen *Trivium* für die Ausbildung handlungsleitend waren – Grammatik, Dialektik/Logik und Rhetorik. Es geht darum, eine syntaktisch-formal korrekte (Grammatik), inhaltlich stimmige und nachvollziehbare (Dialektik/Logik) sowie die angestrebten Vermittlungsziele erreichende (Rhetorik) Redeweise als Fähigkeit und Fertigkeit auszubilden. Dies gilt für die sprachlichen ebenso wie für die computersprachlichen Fertigkeiten und ist Kern dessen, was heute – offensichtlich mangels geeigneter deutscher Termini – gern als *technical literacy* bezeichnet wird.

Mit der vielfach gescholtenen Kompetenzorientierung der Bildungsstandards [10] schwenkte die KMK 2012 auf eine vergleichbare Linie ein, in welcher der Ausprägung sprachlicher Fähigkeiten und argumentativer Fertigkeiten zentrale Bedeutung zukommt und in welcher die Rolle der mittelalterlichen Rhetorik durch die *Gestaltungskompetenz* eingenommen wird. Der verbreiteten Kritik, dass hierbei die Inhalte bis zur Beliebigkeit verkämen und so auf der Strecke blieben, kann mit einem Blick auf die mittelalterlichen Praxen begegnet werden – neben den *sprachlichen* Fächern des Triviums gehörten die mathematischen Fächer des Quadriviums als *inhaltliche* Seite zum Ausbildungskanon in den *sieben freien Künsten*.

Ein solcher inhaltlicher Ansatz war bereits in den *Einheitlichen Prüfungsanforderungen* [8] untersetzt, in deren Präambel zunächst nur der „spezielle, unverzichtbare Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung und Studierfähigkeit“, also zur Entwicklung sprachlicher Fertigkeiten, unterstrichen wird. Dieser Beitrag werde vor allem durch „drei *Grunderfahrungen* ermöglicht“:

- Mathematik als deduktives System abstrakter Objekte,
- Mathematik als Reservoir an Modellen und
- Mathematik als ideales Übungsfeld zum Erwerb allgemeiner Problemlösefähigkeiten.

Das Trivium lässt grüßen. Weiter geht es inhaltlich mit den drei *Sachgebieten*

- *Analysis* als Grundlage fundamentaler mathematischer Begriffe und Verfahren zur Beschreibung von Abhängigkeiten und Veränderungsprozessen,
- *Lineare Algebra/Analytische Geometrie* mit ihren Methoden zur Algebraisierung von Objekten und zur analytischen Beschreibung des Raumes sowie

- *Stochastik* mit der Möglichkeit zur quantitativen Beschreibung von Vorgängen, die vom Zufall abhängen, und zur Beurteilung ihrer Ergebnisse.

In den Bildungsstandards [10] wird diese Unterteilung aufgenommen und in einer Fachpräambel betont, dass „allgemeine mathematische Kompetenzen und Inhalte untrennbar miteinander verknüpft“ seien. Diese Verknüpfung wird in einem würfelförmigen *Kompetenzmodell* [10, S. 11] mit drei Begriffsebenen *Anforderungsbereich* (Könnensdimension), *Leitideen* (inhaltliche Dimension) und *Allgemeine mathematische Kompetenzen* entwickelt.

Die *Leitideen* umfassen die fünf Bereiche (1) Algorithmus und Zahl, (2) Messen, (3) Raum und Form, (4) Funktionaler Zusammenhang und (5) Daten und Zufall, die in den Standards inhaltlich weiter untersetzt und den drei *Sachgebieten* zugeordnet werden.

Die inhaltlichen Anforderungen an Abiturientinnen in diesen drei Sachgebieten werden in [10, S. 25 ff.] durch folgende Beschreibungen (Auswahl) weiter untersetzt:

Analysis: Sekanten- und Tangentensteigungen bestimmen; Änderungsraten berechnen und deuten; Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen; Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen; aus der Sekundarstufe I bekannte Funktionsklassen [...] nutzen; Ableitung als lokale Änderungsrate deuten; Änderungsraten funktional beschreiben; Faktor-, Summen-, Produkt- und Kettenregel anwenden; die Ableitung zur Bestimmung von Monotonie und Extrema von Funktionen nutzen; den Ableitungsgraphen aus dem Funktionsgraphen und umgekehrt entwickeln; das bestimmte Integral deuten, insbesondere als (re-)konstruierten Bestand; Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren; die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten; die ln-Funktion als Stammfunktion von $x \rightarrow \frac{1}{x}$ und als Umkehrfunktion der exp-Funktion nutzen.

Geometrie und Algebra: Algorithmisches Lösen linearer Gleichungssysteme; geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren; elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen; das Skalarprodukt geometrisch deuten; Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden; Geraden und Ebenen analytisch beschreiben; die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untersuchen; Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen; das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen.

Stochastik: Erwartungswert und Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen; Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen; Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten; stochastische Unabhängigkeit; die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen; exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen; Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden; in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen; Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen; exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen; Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen.

Damit ist das Anforderungsniveau des bundesdeutschen Mathematikabiturs hinreichend genau umrissen. Die Menge inhaltlicher Fehlstellen insbesondere im Geometriebereich (Vektor- und Spatprodukt, Kegelschnitte, sphärische Geometrie und Trigonometrie, fortgeschrittene Elementargeometrie, ...) mag man auf der einen Seite bedauern. Man ist auf der anderen Seite aber gut beraten, sie als Fakt für die durchschnittliche Abiturientin und damit potenzi-

elle Studienanfängerin zur Kenntnis zu nehmen. Zum Glück hält sich hartnäckig die Tradition gymnasialer Pluskurse als schulindividueller Freiraum für die Vermittlung derartiger „zusätzlicher“ Inhalte, der bisher von engagierten Lehrerinnen in allen Reformen der Abiturstufe erfolgreich verteidigt werden konnte.

In diesem Buch sind besonders bei den Geometrieaufgaben beide Perspektiven – die Standardperspektive mit „angezogener Handbremse“ und die fortgeschrittene – angemessen berücksichtigt. In den Sachgebieten Analysis und Stochastik besteht dieses „Problem“ weniger, da in Abituraufgaben etwa Trigonometrie schlicht nicht mehr vorkommen *kann*, wenn sie aus den Curricula gestrichen wurde³.

1.3 Schule 4.0

Nach Visionen und Realitäten eine abschließende Zusammenschau der Argumente im Lichte der Debatten um das Konzept einer *Schule im 21. Jahrhundert* oder kurz *Schule 4.0*⁴.

Ich sehe mich einig mit den *Bildungsstandards*, dass die Ausprägung sprachlicher Fähigkeiten und Fertigkeiten (die computersprachliche Dimension eingeschlossen) einen zentraleren Stellenwert in der Konzeption einer „Schule der Zukunft“ einnehmen sollte. Die dabei zu bewältigenden *Herausforderungen* liegen allerdings quer zu allen curricularen Traditionen und Fächerzuschnitten, in denen die *ganzheitliche* Entwicklung eines Sprachvermögens bei der Lese- und Rechenkompetenz endet, wenn man einmal den schillernden Begriff „Medienkompetenz“ außer Betracht lässt. Die ganzheitliche Entwicklung eines Sprachvermögens in oben umrissener Dimension bleibt bereits in der Schule im Dickicht der Fächerkulturen stecken und hat auch mit dem aktuellen Schwenk hin zu einer Kompetenzorientierung bisher nicht die erforderliche Aufmerksamkeit erlangt.

In einem Vortrag auf dem *Casio Teach & Talk* am 13. Januar 2012 in Coswig habe ich meine Überlegungen in sechs Thesen zusammengefasst:

1. Mathematik ist die Grundlage von *Rechenkompetenz* – der Fähigkeit, die Folgen eigener Handlungsmöglichkeiten quantitativ abzuschätzen.
2. Mathematik ist die Grundlage von *Sprachkompetenz* – der Fähigkeit, über die quantitativen Folgen gemeinsamer Handlungsmöglichkeiten zu kommunizieren.
3. Mathematik ist die Grundlage von *Gestaltungskompetenz* – der Fähigkeit, Handlungsmöglichkeiten zur gemeinsamen Gestaltung der eigenen Lebensbedingungen vernünftig auszuwählen und umzusetzen.
4. Mit diesen Kompetenzen hat die mediale Mehrheit der Deutschen so wenig am Hut, dass uns mittlerweile die Fachkräfte ausgehen. *MINT – Zukunft schaffen* ruft müde die Politik.
5. Mit dem Computer hält *Technik* in das dafür überhaupt nicht vorbereitete deutsche Gymnasium Einzug.

³Das war 2009 noch nicht so.

⁴Google hat davon erfahren, dass „die Roland Berger Stiftung mit ihrer neuesten Studie 'Schule 4.0' ein Konzept vorgelegt habe, wie Bildungschancen gerechter verteilt werden können“.

6. Computermathematik im Schulunterricht steht im Schnittpunkt all dieser ungeliebten Entwicklungslinien.

In meinem Aufsatz [4] ist dies genauer ausgeführt. Wesentliche Punkte eines solchen *kulturell-sprachlichen* Zugangs zur Computeralgebra habe ich im Folgenden noch einmal zusammengefasst:

1. Die Mathematik als *lingua franca* hat ihr Pendant in der Programmiersprache des eingesetzten CAS, mit deren Hilfe Schülerinnen in die Lage versetzt werden (können), mathematische Probleme so weit und so stringent sprachlich aufzubereiten, dass sie sogar ein „dummer“ Computer versteht.
2. Die hierfür zu entwickelnde und zu erwerbende Ausdrucksfähigkeit besteht aus zwei Komponenten – der (möglichst raschen) Beherrschung eines kleinen Instrumentariums nützlicher und wiederkehrender Kontrollfluss-Strukturen und der (inkrementellen) Erschließung der mathematischen und syntaktischen Bedeutung konkreter Funktionen in der Einheit von Methoden- und Interpretationskompetenz.
3. Der Computer⁵ ist ein geduldiger Partner für einen derartigen explorativen Zugang zu Mathematik als Sprache. Er vermag auf den individuellen Erkenntnisstand differenziert einzugehen, erlaubt gruppendynamische Szenarien und gibt schnelles Feedback.
4. Der Einsatz von Taschenrechnern oder CAS *ohne* derartige ausgebaute Sprach-, also ohne Programmierfähigkeit oder Abstinenz in der Nutzung derselben verstellt gründlich den Blick auf Mögliches und Wünschenswertes.

Die prinzipielle kulturelle Bedeutung des Zugangs zu diesen (programmier)-sprachlichen Mitteln bereits im Schulunterricht kann kaum überschätzt werden. Dabei ist auch zu klären, ob Computeralgebra in der Ausbildung ausschließlich Mittel zum Erreichen bisheriger Zwecke im Spannungsfeld zwischen Mathematik- und Informatik-Ausbildung ist oder ob es – jenseits aller Begeisterung – in einer technik- und algorithmendominierten Welt auch eine eigenständige Bedeutung etwa für die Allgemeinbildung hat, Erfahrungen mit computeralgebraischen Werkzeugen zu sammeln und kritisch zu verarbeiten.

⁵So fetischisiert ist das hier natürlich nicht gemeint. Im Hintergrund steht immer das von konkreten Lehrerinnen pädagogisch durchdachte *Einsatzszenario* des Werkzeugs.

Literatur

- [1] *Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife in Deutsch, Mathematik, Englisch, Französisch*. Information der Abteilung 4 C des Ministeriums für Bildung Rheinland-Pfalz (10.03.2015).
- [2] GeoGebra. International GeoGebra Institute, 2013. <https://www.geogebra.org/>
- [3] Hans-Gert Gräbe, Michael Kofler: *Mathematica 6 – Einführung, Grundlagen, Beispiele*. Pearson Studium, München 2007 (5., aktualisierte Auflage).
- [4] Hans-Gert Gräbe. Der Funktionsbegriff im symbolischen Rechnen. *Der Mathematikunterricht*, 1/2014. S. 3–15.
- [5] Hans-Gert Gräbe. GeoProver. <https://github.com/hg-graebe/GeoProver>
- [6] Hans-Gert Gräbe. Skript *Einführung in das symbolische Rechnen*. Wintersemester 2017/18. <https://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe/skripte/>.
- [7] Hans-Gert Gräbe. Skript *Geometrie mit dem Computer*. Sommersemester 2018. <https://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe/skripte/>.
- [8] Kultusministerkonferenz (2002). Einheitliche Prüfungsanforderungen der Kultusministerkonferenz für die Abiturprüfung im Fach Mathematik. Quelle: [16]
- [9] Webseiten des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB). <https://www.iqb.hu-berlin.de>
- [10] Kultusministerkonferenz (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. <https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html>
- [11] Ada Lovelace. Zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Ada_Lovelace.
- [12] Karl Marx: Das Kapital. Erster Band. MEW 23, Berlin 1971.
- [13] Wolfram MATHEMATICA, „das weltweit maßgebende System für technische Berechnung.“ <https://www.wolfram.com/mathematica/>.
- [14] MAXIMA, a Computer Algebra System. <http://maxima.sourceforge.net>.
- [15] Klaus Thuß u.a. . Aufgaben des Sächsischen Matheabiturs. Sächsischer Bildungsserver. <http://www.sn.schule.de/~matheabi/> (Seit März 2018 nicht mehr online.)
- [16] Thomas Unkelbach. Mathematik Sekundarstufe II – Abiturprüfungen verschiedener Bundesländer. <http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/abi/abiindex.html>